Государственное автономное профессиональное образовательное учреждение
Тюменской области
«Тюменский колледж производственных и социальных технологий»

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

к изучению раздела «Элементы аналитической геометрии»

дисциплины ЕН. 01 Элементы высшей математики

Тюмень, 2019 г.

Исказиева А.М.

Элементы аналитической геометрии. Учебно-методическое пособие к изучению раздела «Элементы аналитической геометрии» дисциплины ЕН.01 Элементы высшей математики. – Тюмень: ГАПОУ ТО «Тюменский колледж производственных и социальных технологий», 2019. – 41 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов ГАПОУ ТО «Тюменский колледж производственных и социальных технологий» и может использоваться для аудиторных занятий и самостоятельной работы. В учебно-методическом пособии содержатся теоретические сведения о векторах, уравнениях линии на плоскости и кривых второго порядка, большое количество примеров с решениями и задания для самостоятельного овладения материалом. Все части учебно-методического пособия имеют примеры решения заданий.

СОДЕРЖАНИЕ

1.1. ВЕКТОРА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ 4
1.1.1. Вектор. Основные понятия 4
1.1.2. Сумма векторов 5
1.1.3. Разность векторов 6
1.1.4. Произведение вектора на число 7
1.1.5. Угол между векторами. Проекция вектора на ось 8
1.1.6. Разложение вектора в базисе 9
1.1.7. Действия над векторами в координатной форме 10
1.2. СКАЛЯРНОЕ, ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ 12
1.2.1. Скалярное произведение 12
1.2.2. Скалярное произведение векторов в координатной форме 13
1.2.3. Нахождение угла между векторами 13
1.2.4. Векторное произведение векторов 13
1.2.5. Смешанное произведение векторов 15
1.3. УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ 17
1.3.1. Общее уравнение прямой 17
1.3.2. Уравнение прямой, проходящей через данную точку и имеющей заданный нормальный вектор 17
1.3.3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку и имеющей заданный направляющий вектор 18
1.3.4. Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту 18
1.3.5. Уравнение прямой с угловым коэффициентом 19
1.3.6. Уравнение прямой, проходящей через две точки. 20
1.3.7. Уравнение прямой в отрезках 20
1.4. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ПРЯМЫХ 22
1.4.1. Параллельность прямых 22
1.4.2. Перпендикулярность прямых 22
1.4.3. Угол между двумя прямыми 24
1.5. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА 25
1.5.1. Окружность и ее уравнение 25
1.5.2. Эллипс и его уравнение 26
1.5.3. Гипербола и ее уравнение 27
1.5.4. Парабола и ее уравнение 29
2. ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ 31
2.1. Вектора. Скалярное произведение векторов 31
2.2. Уравнение прямой на плоскости 32
2.3. Кривые второго порядка 34
2.4. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 37
ЛИТЕРАТУРА 42

1.1. ВЕКТОРА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

1.1.1. Вектор. Основные понятия

Величины, которые полностью определяются своими численными значениями, называются скалярными.

Другие величины, например сила, скорость, ускорение, определяются не только своим числовым значением, но и направлением. Такие величины называют векторными.

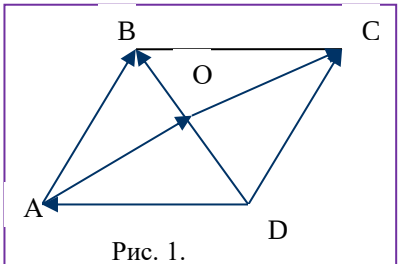


Рис. 1.

Вектор – это направленный прямолинейный отрезок, т.е. отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление.

Если А – начало вектора, а В – его конец, то вектор обозначается символом $\overline{AB}$ или $\bar{a}$.

Пример 1. Записать векторы, изображенные на рис. 1.

Решение. Так как первая буква в записи вектора должна обозначать начало вектора, то на изображены следующие векторы: $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{AO}$; $\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{DA}$

Вектор $\left(-\vec{a}\right)$ называется противоположным вектором для вектора $\vec{a}$, если он ему коллинеарен, имеет одинаковую с $\vec{a}$ длину, но направлен в противоположную сторону.

Векторы $\vec{a}$ и $\left(-\vec{a}\right)$ называются взаимно противоположными векторами.

Вектор $\overline{BA}$ (у него начало в точке В, а конец в точке А) называется противоположным вектору $\overline{AB}$.

Длиной или модулем вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка и обозначается $\left|\overline{AB}\right|$.

Вектор, длина которого равна нулю (т.е. начало и конец совпадают), называется нулевым вектором и обозначается $\bar{0}$ или $\overline{AA}$. Нулевой вектор направления не имеет.

Вектор, длина которого равна единице, называется единичным вектором и обозначается $\bar{e}$.

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

У коллинеарных векторов одноименные координаты пропорциональны. Записывают: $\bar{a} \parallel \bar{b}$. Коллинеарные векторы могут быть направлены одинаково или противоположно. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Векторы, расположенные на одной плоскости или на параллельных плоскостях, называются компланарными.

Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются равными ($\bar{a} = \bar{b}$), если они коллинеарные, одинаково направленные и имеют одинаковые длины.

Пример 2. На рис. 2. векторы образуют прямоугольник.

Справедливо равенство $\bar{b} = \bar{d}$, но $\bar{a} \neq \bar{c}$. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{c}$ - противоположные, $\bar{a} = -\bar{c}$.

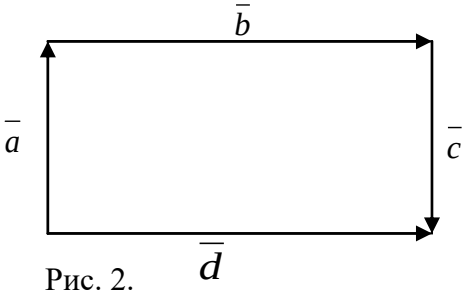


Рис. 2.

<u>Справедливы следующие утверждения:</u>

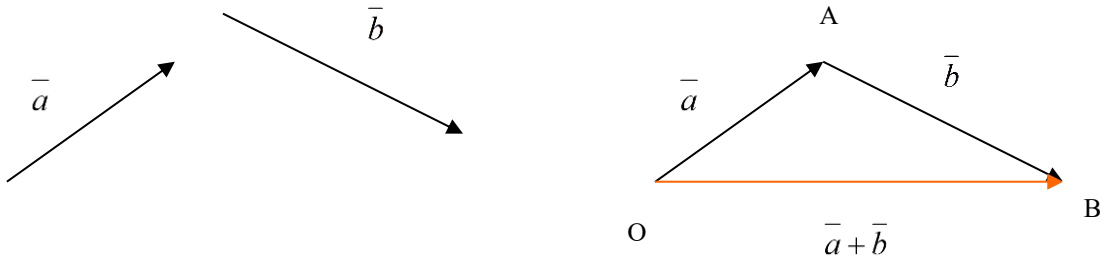
- Любой вектор равен самому себе, т.е. $\bar{a} = \bar{a}$
- Если два вектора по отдельности равны третьему, то они равны между собой, т.е. если $\bar{a} = \bar{c}$ и $\bar{b} = \bar{c}$, то $\bar{a} = \bar{b}$
- вектор можно переносить параллельно самому себе, а начало вектора помещать в любую точку пространства.

1.1.2. Сумма векторов

Под линейными операциями над векторами понимают операции сложения и вычитания векторов, а также умножения вектора на число.

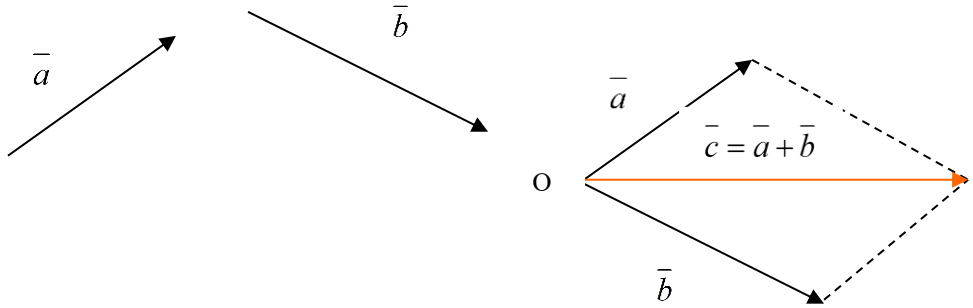
Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ - два произвольных вектора. Возьмем произвольную точку О и построим вектор $\overline{OA} = \bar{a}$. От точки А отложим вектор $\overline{AB} = \bar{b}$.

Вектор $\overline{OB}$, соединяющий начало первого вектора с концом второго, называется **суммой векторов** $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $\overline{OB} = \bar{a} + \bar{b}$.



Это правило сложения векторов называют **правилом треугольника**.

Сумму двух векторов можно также построить по **правилу параллелограмма**:



Пример 3. Построить сумму трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ изображенных на рис. 3.

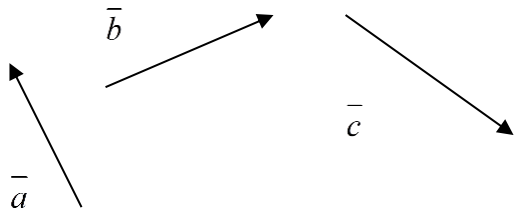


Рис. 3.

Решение. Выберем произвольную точку О на плоскости. Отложим от точки О вектор $\overrightarrow{OA}$ равный вектору $\bar{a}$. От точки А отложим вектор $\overrightarrow{AB} = \bar{b}$. От точки В отложим вектор $\overrightarrow{BC} = \bar{c}$. Тогда вектор, соединяющий начало первого вектора точку О и конец последнего вектора точку С, будет являться вектором суммы (рис. 4.).

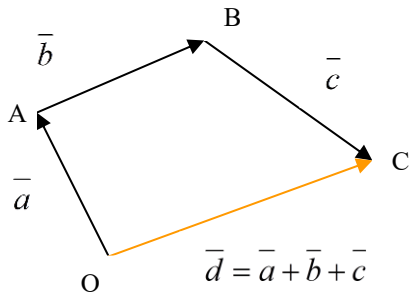


Рис. 4.

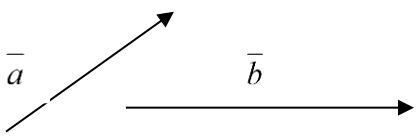
Свойства суммы векторов.

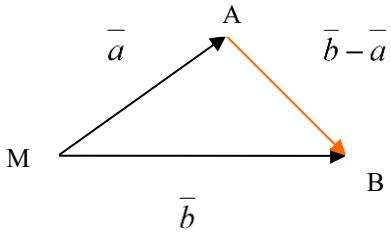
1. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ - переместительный закон;
2. $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$ - сочетательный закон;
3. $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$

1.1.3. Разность векторов

Под **разностью векторов** $\bar{a}$ и $\bar{b}$ понимается вектор $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$ такой, что $\bar{b} + \bar{c} = \bar{a}$.

Чтобы найти разность векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, нужно выбрать произвольную точку М и отложить от нее вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Если соединить концы векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, то получится вектор $\overline{BA} = \bar{a} - \bar{b}$ или вектор $\overline{AB} = \bar{b} - \bar{a}$.





Пример 4. Найти разность векторов $\bar{a}$ - $\bar{b}$ изображенных на рис. 5.

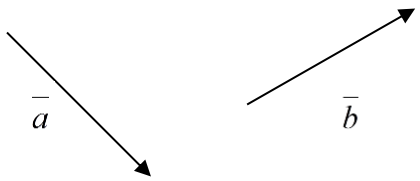
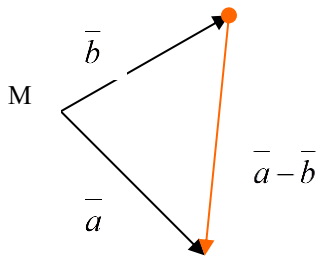
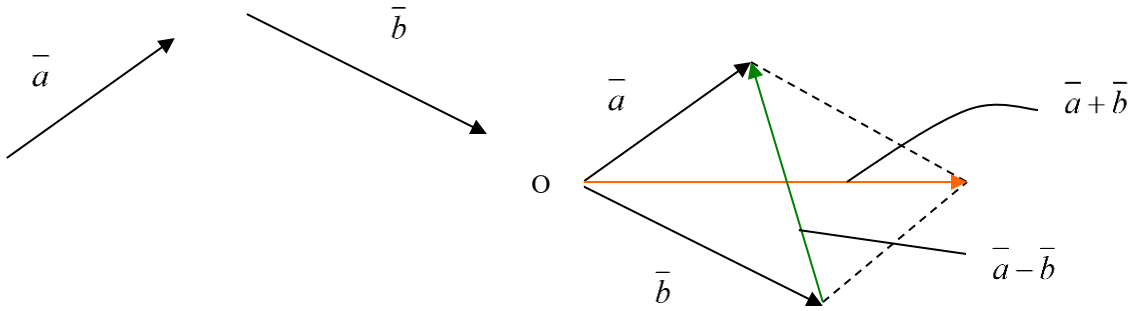


Рис. 5.

Решение. Выберем произвольную точку М на плоскости. Отложим от нее два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Соединяем концы векторов.



Отметим, что в параллелограмме построенном на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, одна направленная диагональ является суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, а другая – разностью.



Можно вычитать векторы по правилу: $\bar{a}-\bar{b}=\bar{a}+(-\bar{b})$, т.е. вычитание векторов заменить сложением вектора $\bar{a}$ с вектором, противоположным вектору $\bar{b}$.

1.1.4. Произведение вектора на число

Произведением вектора $\bar{a}$ на скаляр (число) λ называется вектор $\lambda\bar{a}$, который имеет длину, равную $\lambda|\bar{a}|$, и коллинеарен вектору $\bar{a}$. При этом если $\lambda>0$, то векторы $\bar{a}$ и $\overline{\lambda a}$ сонаправлены; если же $\lambda<0$, то векторы $\bar{a}$ и $\overline{\lambda a}$ противоположно направлены.

Пример 5. Пусть заданы векторы $\bar{a}, \bar{b}$ (рис. 6.) Построить вектор $3\bar{a}+5\bar{b}$.

Решение. Выберем произвольно точку О и отложим вектор $\bar{a}$, увеличенный в три раза, сохраняя коллинеарность. От конца вектора $3\bar{a}$ отложим вектор $\bar{b}$, увеличенный в 5 раз, сохраняя коллинеарность. Соединяя начало первого вектора и конец последнего, получим сумму векторов.

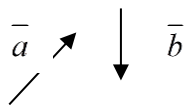
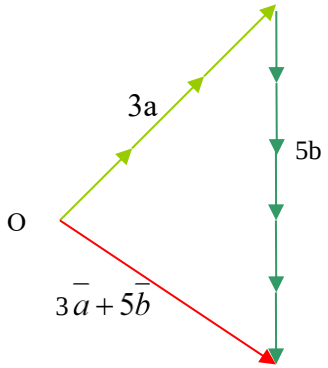


Рис. 6

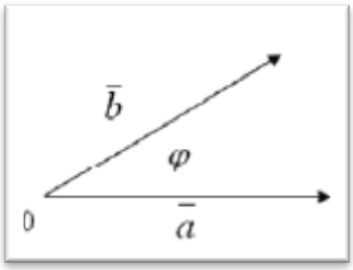


Свойства произведения вектора на число:

1. Если $\bar{b}=\lambda\bar{a}$, то $\bar{b} \parallel \bar{a}$. Наоборот, если $\bar{b} \parallel \bar{a}$, ($\bar{a} \neq \bar{0}$), то при некотором λ верно равенство $\bar{b} = \lambda\bar{a}$;
2. $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot \bar{a}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \bar{a}$;
3. $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \bar{a} = \lambda_1 \cdot \bar{a} + \lambda_2 \cdot \bar{a}$;
4. $\lambda \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda \cdot \bar{b}$.

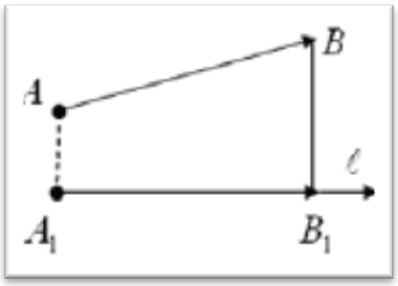
1.1.5. Угол между векторами. Проекция вектора на ось

Пусть заданы векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Выберем в пространстве произвольную точку О и отложим от этой точки векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.



Углом между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется наименьший угол φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$), на который нужно повернуть один из заданных векторов до его совпадения со вторым.

Пусть в пространстве заданы вектор $\overrightarrow{AB}$ и ось l. Обозначим через A_1 и B_1 проекции на ось l точек A и B соответственно. Построим вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ и назовем его компонентом вектора $\overrightarrow{AB}$ по оси l.



Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l называется длина его компоненты $\overrightarrow{A_1B_1}$ по этой оси, если компонента направлена в ту же сторону, что и ось l; противоположное число, если компонента и ось имеют разные направления; нуль, если компонента есть нулевой вектор.

Проекция вектора на ось обозначается в виде $пр_l \overrightarrow{AB}$ или $пр_l \vec{a}$. Выберем на оси l единичный вектор $\vec{e}$ имеющий то же направление, что и ось l.

Углом между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{e}$ называется угол между вектором $\overrightarrow{AB}$ и осью l.

Теорема 1. Проекция вектора $\vec{a}$ на ось l равна модулю вектора $\vec{a}$, умноженному на косинус угла φ между вектором и осью: $пр_l \vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$.

Теорема 2. Проекция суммы векторов на ось равна сумме проекции слагаемых векторов на ту же ось: $пр_\ell(\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \ldots + \bar{a}_k) = пр_\ell \bar{a}_1 + пр_\ell \bar{a}_2 + \ldots + пр_\ell \bar{a}_k$.

Теорема 3. Если вектор $\vec{a}$ умножить на число λ, то его проекция на ось умножится на это число: $пр_\ell(\lambda \bar{a}) = \lambda\, пр_\ell \bar{a}$.

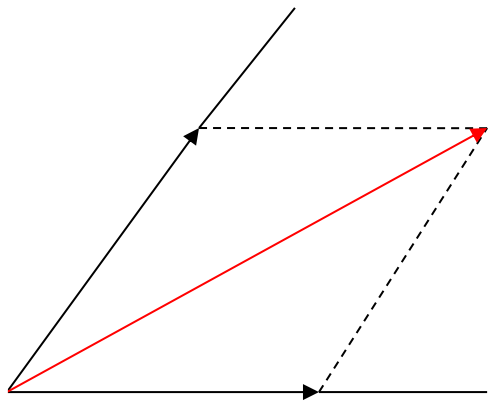
1.1.6. Разложение вектора в базисе

Линейной комбинацией векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$ называется сумма произведений этих векторов на какие-либо числа $k_1, k_2, ..., k_n$.

Например, $4\bar{a} - 2\bar{b} + \frac{1}{3}\bar{c}$ - линейная комбинация векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

Как на странице 6: любой вектор $\bar{m}$ на плоскости может быть представлен единственным способом в виде линейной комбинации двух неколлинеарных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т.е. $\bar{m} = x\bar{a} + y\bar{b}$.

Согласно правилу параллелограмма вектор $\bar{m}$ равен сумме векторов, на которых построен параллелограмм. Стороны параллелограмма представляют собой векторы $x\bar{a}$ и $y\bar{b}$, где x и y – числа. Говорят что вектор $\bar{m}$ разложен в базисе ($\bar{a}, \bar{b}$) (рис. 7).



Базисом на плоскости называется пара неколлинеарных векторов, взятых в определенном порядке.

Числа x и y называются координатами вектора $\overline{m}$ в базисе ($\overline{a}$, $\overline{b}$).

Если в качестве базиса взять два взаимно перпендикулярных единичных вектора $\overline{i}$ и $\overline{j}$, то говорят что вектор разложен в декартовой системе координат.

Точка O, принятая за начало векторов $\overline{i}$ и $\overline{j}$, называется **началом координат**.

Прямые проведенные через векторы $\overline{i}$, $\overline{j}$, называются **осями координат**, соответственно осью абсцисс и осью ординат (рис. 8).

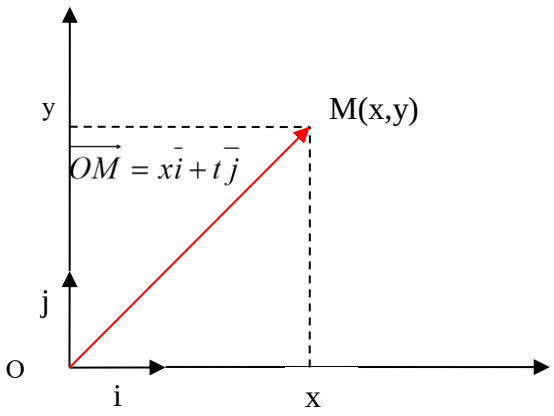


Рис. 8

1.1.7. Действия над векторами в координатной форме

Пусть даны две точки с координатами $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, тогда вектор $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ т.е. **для нахождения координат вектора нужно из координат его конца вычесть координаты начала.**

1. При сложении двух и большего числа векторов их одноименные координаты складываются, т.е. если $\overline{a} = (x_1; y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2; y_2, z_2)$, то $\overline{a} + \overline{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$;

2. При вычитании векторов их одноименные координаты вычитаются, т.е. если $\overline{a}=(x_1;y_1,z_1)$, $\overline{b}=(x_2;y_2,z_2)$, то $\overline{a}-\overline{b}=(x_1-x_2;y_1-y_2;z_1-z_2)$;

3. При умножении вектора на число каждая координата вектора умножается на это число, т.е. если $\overline{a}=(x;y;z)$, то $\lambda\overline{a}=(\lambda x;\lambda y;\lambda z)$;

Длина вектора, выходящего из начала координат, равна квадратному корню из суммы квадратов его координат т.е. $\left|\overline{OM}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ **.**

Если вектор задан двумя точками $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$, то $\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$, и **длину вектора можно найти по формуле** $\left|\overline{M_1M_2}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

По этой же формуле можно найти **расстояние между двумя точками**, так как длина вектора равна длине порождающего его отрезка.

<u>Пример 6.</u> Найти сумму векторов $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, длину векторов $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$, если

A=(4;2;0), B=(-1;3;1), C=(-3;5;-2).

Решение. Найдем **координаты векторов** $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$.

Для этого из координат конца вектора вычесть координаты начало.

$\overrightarrow{AB}=(-1-4;3-2;1-0)=(-5;1;1)$; $\overrightarrow{BC}=(-3-(-1);5-3;-2-1)=(-2;2;-3)$.

Найдем **сумму векторов** (складываем одноименные координаты):

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(-5+(-2);1+2;1+(-3))=(-7;3;-2)$;

Найдем **длину векторов** $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$, для этого воспользуемся формулой

$\boxed{\left|\overline{M_1M_2}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\overrightarrow{AB}=(-5;1;1)$, $\overrightarrow{BC}=(-2;2;-3)$получим

$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{(-5)^2+1^2+1^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$;

$\left|\overline{BC}\right|=\sqrt{(-2)^2+2^2+(-3)^2}=\sqrt{17}$

Контрольные вопросы

1. Что называется вектором?
2. Что называется длиной вектора?
3. Какие векторы называются равными?
4. Как сложить два вектора?
5. Как найти разность двух векторов?
6. Как умножить вектор на число?
7. Какие векторы называются коллинеарными?

8. Как разложить вектор в декартовой системе координат?
9. Что называется базисом?
10. Что называется координатами вектора?
11. Как найти координаты вектора, заданного двумя точками?
12. Как найти длину вектора, заданного двумя точками?
13. Как выполняется сложение и вычитание векторов, заданных своими координатами?
14. Как умножить вектор, заданный своими координатами, на число?

1.2. СКАЛЯРНОЕ, ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

1.2.1. Скалярное произведение

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi$$

<u>Свойства скалярного произведения:</u>

1) Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины: $\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2$
2) Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти вектора перпендикулярны: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos 90=0$, если $\vec{a}\perp\vec{b}$ или $\vec{a}=0$ или $\vec{b}=0$;
3) Скалярное произведение обладает переместительным свойством: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
4) Скалярное произведение обладает распределительным свойством:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c};$$

5) Скалярное произведение обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя: $(m\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(m\vec{b})=m(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

<u>Пример 1.</u> Найти $(5\vec{a}+3\vec{b})(2\vec{a}-\vec{b})$, если $\left|\vec{a}\right|=2,\quad \left|\vec{b}\right|=3,\quad \vec{a}\perp\vec{b}.$

Решение. $10\vec{a}\cdot\vec{a}-5\vec{a}\cdot\vec{b}+6\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{b}\cdot\vec{b}=10\left|\vec{a}\right|^2-3\left|\vec{b}\right|^2=40-27=13$,

т.к. $\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2=4,\quad \vec{b}\cdot\vec{b}=\left|\vec{b}\right|^2=9,\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=0$ ($\vec{a}\perp\vec{b}$.).

<u>Пример 2.</u> Найти скалярное произведение $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(5\vec{a}-6\vec{b})$, если $\left|\vec{a}\right|=4,\quad \left|\vec{b}\right|=6,\quad \vec{a}\wedge\vec{b}=\pi/3.$

Решение.

$15\vec{a}\cdot\vec{a}$ -$18\vec{a}\cdot\vec{b}$ -$10\vec{a}\cdot\vec{b}$ +$12\vec{b}\cdot\vec{b}$ =$15|\vec{a}|^2-28|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}+12|\vec{b}|^2=15\cdot16-28\cdot4\cdot6\cdot\frac{1}{2}+$

+ 12·36 = 240 – 336 + 432 = 672 – 336 = 336.

1.2.2. Скалярное произведение векторов в координатной форме

Пусть вектора заданы своими координатами $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1);\quad \vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ то **скалярное произведение векторов равно сумме произведений одноименных координат.**

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

<u>Пример 3</u>. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}=(3;2;1)$ и $\bar{b}=(-5;4;0)$.

Решение. $\bar{a}\cdot\bar{b}=3\cdot(-5)+2\cdot4+1\cdot0=-15+8=-7$

1.2.3. Нахождение угла между векторами

Из определения скалярного произведения двух векторов можно получить формулу, которая позволяет найти **угол между векторами**: $\cos\varphi=\frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$

Эту формулу можно записать в **координатной форме**:

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

<u>Пример 4.</u> Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-k$, $\vec{b}=6\vec{i}+4\vec{j}+2k$.

Решение. Т.е. $\vec{a}$ = (1;2;-1), $\vec{b}$ = (6;4;2)

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot6+2\cdot4+(-1)\cdot2}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{6^2+4^2+2^2}}.$$

$$\cos\varphi=\frac{12}{\sqrt{6}\sqrt{58}}=\frac{12}{2\sqrt{87}}=\frac{6}{\sqrt{87}};\qquad \varphi=\arccos\frac{6}{\sqrt{87}}.$$

1.2.4. Векторное произведение векторов

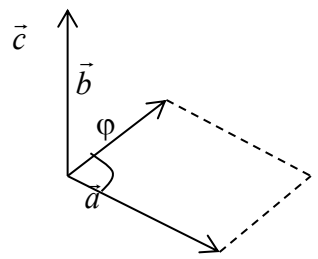
Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$, где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\sin\varphi\ge0;\quad 0\le\varphi\le\pi$

2) вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов.

Обозначается: $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ или $\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]$.



<u>Свойства векторного произведения векторов:</u>

1) $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$;

2) $\vec{a}\times\vec{b}=0$, если $\vec{a}\,||\,\vec{b}$ или $\vec{a}=0$ или $\vec{b}=0$;

3) $(m\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(m\vec{b})=m(\vec{a}\times\vec{b})$;

4) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$;

5) Если заданы векторы $\vec{a}(x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{b}(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат с единичными векторами $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, то

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_a & y_a & z_a\\ x_b & y_b & z_b\end{vmatrix}$$

6) Геометрическим смыслом векторного произведения векторов является площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Пример 5. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}=2\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$. $\vec{a}$ = (2, 5, 1); $\vec{b}$ = (1, 2, -3)

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 5 & 1\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}5 & 1\\ 2 & -3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-17\vec{i}+7\vec{j}-\vec{k}.$$

Пример 6. Вычислить площадь треугольника с вершинами A(2, 2, 2), B(4, 0, 3), C(0, 1, 0).

$$\overrightarrow{AC}=(0-2;\ 1-2;\ 0-2)=(-2;-1;-2)$$

$$\overrightarrow{AB}=(4-2;\ 0-2;\ 3-2)=(2;-2;1)$$

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & -1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}(-1-4)-\vec{j}(-2+4)+$$

$$+\vec{k}(4+2)=-5\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}.$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{25+4+36}=\sqrt{65}. \qquad S_{\Delta}=\frac{\sqrt{65}}{2}\ (\text{ед}^2).$$

Пример 7. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}+3\vec{b}$; $3\vec{a}+\vec{b}$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$; $\vec{a}\wedge\vec{b}=30^0$.

$$(\vec{a}+3\vec{b})\times(3\vec{a}+\vec{b})=3\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+9\vec{b}\times\vec{a}+3\vec{b}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}+9\vec{b}\times\vec{a}=8\vec{b}\times\vec{a}$$

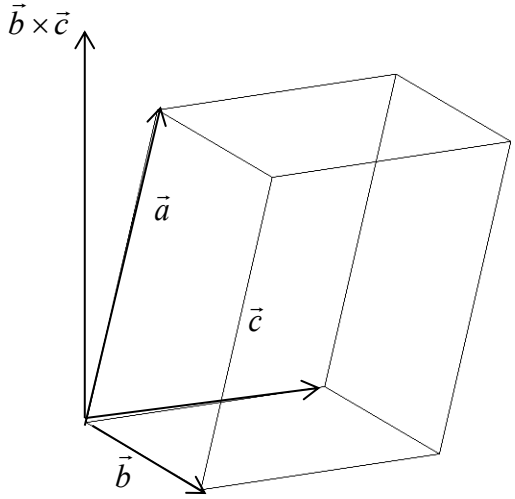
$S = 8|\vec{b}||\vec{a}|\sin 30^0 = 4$ (ед^2).

1.2.5. Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор, равный векторному произведению векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

<u>Обозначается</u> $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ или ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$).

Смешанное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.



<u>Свойства смешанного произведения</u>:

1) Смешанное произведение равно нулю, если:
   а)хоть один из векторов равен нулю;
   б)два из векторов коллинеарны;
   в)векторы компланарны.

2) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$

3) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b}) = -(\vec{b},\vec{a},\vec{c}) = -(\vec{c},\vec{b},\vec{a}) = -(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$

4) $(\lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c}) = \lambda(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c}) + \mu(\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})$

5) Модуль смешанного произведения $|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|$ численно равен объему треугольной пирамиды, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$: $\frac{1}{6}|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|$

6) Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$, то

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Пример 8. Доказать, что точки A(5; 7; 2), B(3; 1; -1), C(9; 4; -4), D(1; 5; 0) лежат в одной плоскости.

Найдем координаты векторов:
$$\overrightarrow{AB} = (-2;-6;1)$$
$$\overrightarrow{AC} = (4;-3;-2)$$
$$\overrightarrow{AD} = (-4;-2;2)$$

Найдем смешанное произведение полученных векторов:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-2 & -6 & 1\\ 4 & -3 & -2\\ -4 & -2 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & -6 & 1\\ 0 & -15 & 0\\ 0 & 10 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -6 & 1\\ 0 & -15 & 0\\ 0 & 10 & 0\end{vmatrix}=0,$$

Таким образом, полученные выше векторы компланарны, следовательно точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

Пример 9. Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной на грань BCD, если вершины имеют координаты A(0; 0; 1), B(2; 3; 5), C(6; 2; 3), D(3; 7; 2).

Найдем координаты векторов:

$$\overrightarrow{BA}=(-2;-3;-4)$$
$$\overrightarrow{BD}=(1;4;-3)$$
$$\overrightarrow{BC}=(4;-1;-2)$$

Объем пирамиды

$$V=\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix}-2 & -3 & -4\\ 1 & 4 & -3\\ 4 & -1 & -2\end{vmatrix}=\frac{1}{6}(-2(-8-3)+3(-2+12)-4(-1-16))=$$

$$=\frac{1}{6}(22+30+68)=20(ед^3)$$

Для нахождения **длины высоты** пирамиды найдем сначала площадь основания BCD.

$$\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 4 & -3\\ 4 & -1 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}(-8-3)-\vec{j}(-2+12)+\vec{k}(-1-16)=-11\vec{i}-10\vec{j}-17\vec{k}.$$

$$\left|\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{11^2+10^2+17^2}=\sqrt{121+100+289}=\sqrt{510}$$

$S_{осн}=\sqrt{510}/2$ (ед^2)

Т.к. V = $\frac{S_{осн}\cdot h}{3}$; $\quad h=\frac{3V}{S_{осн}}=\frac{120}{\sqrt{510}}=\frac{4\sqrt{510}}{17}$. (ед)

Контрольные вопросы

1. Что называется скалярным произведением векторов?
2. Как вычисляется скалярное произведение векторов, заданных своими координатами?
3. Какими свойствами обладает скалярное произведение векторов?
4. Чему равно скалярное произведение двух перпендикулярных векторов?
5. Вычислите скалярное произведение векторов $\overline{m}$ и $\overline{n}$, если $\left|\overline{m}\right|=5$, $\left|\overline{n}\right|=3$, а угол между ними равен 60^0.
6. Вычислите скалярное произведение векторов $\overline{m}=(7;2)$ и $\overline{n}=(-3;5)$.

1.3. УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ

1.3.1. Общее уравнение прямой

Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка

$$\boxed{Ax + By + C = 0},$$

причем постоянные A, B не равны нулю одновременно, т.е. $A^2 + B^2 \neq 0$. Это уравнение первого порядка называют **общим уравнением прямой.**

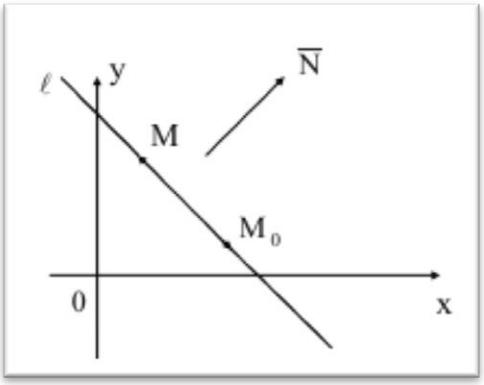
В зависимости от значений постоянных A,B и C возможны следующие частные случаи:

- $C = 0, A \neq 0, B \neq 0$ {Ax+By=0, y=kx} – прямая проходит через начало координат
- $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$ {By + C = 0, y=b}- прямая параллельна оси Ox
- $B = 0, A \neq 0, C \neq 0$ {Ax + C = 0, x=c} – прямая параллельна оси Oy
- $B = C = 0, A \neq 0$ – прямая совпадает с осью Oy, x=0
- $A = C = 0, B \neq 0$ – прямая совпадает с осью Ox, y=0

Уравнение прямой может быть представлено в различном виде в зависимости от каких – либо заданных начальных условий.

1.3.2. Уравнение прямой, проходящей через данную точку и имеющей заданный нормальный вектор

Вектором нормали прямой l называется любой ненулевой вектор $\overline{N}$=(A,B), перпендикулярный этой прямой .



Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеющей заданный нормальный вектор $\overline{N} = (A; B)$, имеет вид

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0}$$

Заметим, что если известно общее уравнение прямой l в виде Ax+By+C=0, то координаты нормального вектора $\overline{N}$=(A; B) равны коэффициентам при x и y в этом уравнении.

Пример 1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку M(1, 2) перпендикулярно вектору $\overrightarrow{N}$ =(3, -1).

Решение. Уравнение имеет вид: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

Подставим в уравнение координаты нормального вектора A=3 и B=-1; координаты заданной точки M: $x_0 = 1;\ \ y_0 = 2$.

$$3(x-1)-1(y-2)=0$$

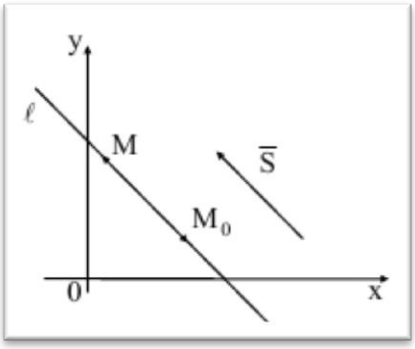
Получим: $3x-3-y+2=0$

$$3x-y-1=0$$

Итого: искомое уравнение: 3x – y – 1 = 0.

1.3.3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку и имеющей заданный направляющий вектор

Направляющим вектором прямой l называется всякий ненулевой вектор $\overline{S}=(m;n)$, параллельный этой прямой.



Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ в заданном направлении вектора $\overline{S}=(m;n)$, имеет вид

$$\boxed{\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}}$$

Пример 2. Найти уравнение прямой с направляющим вектором $\overline{S}$=(1, -1) и проходящей через точку A=(1, 2).

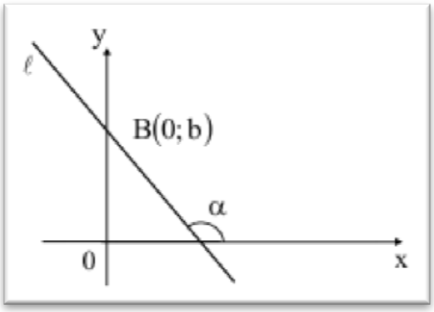
Решение. Уравнение прямой имеет вид: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$.

По условии задачи имеем:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1};\quad \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1};\quad -(x-1)=y-2;\quad -x+1-y+2=0;\ x+y-3=0$$

1.3.4. Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту

Пусть требуется найти уравнение прямой l, если l проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеет угловой коэффициент k.



Уравнением прямой по точке с угловым коэффициентом k имеет вид:

$$\boxed{y - y_0 = k(x - x_0)}$$

Число k=tgα, где α - угол между прямой и осью Ox называется угловым коэффициентом прямой.

<u>Пример 3.</u> Составить уравнение прямой, проходящей через точку C=(2;-1) с угловым коэффициентом k=3.

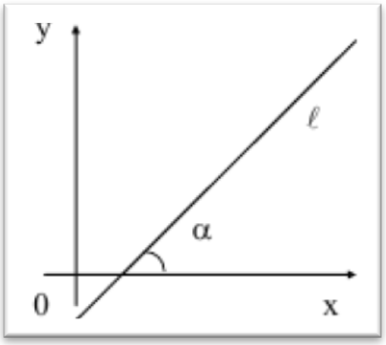
Решение. Уравнение с угловым коэффициентом имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0)$

. С условием задачи получим: $\begin{aligned} y+1 &= 3(x-2) \\ y+1 &= 3x-6 \\ 3x-y-7 &= 0 \end{aligned}$.

Искомое уравнение имеет вид 3x-y-7=0.

1.3.5. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть прямая l наклонена под углом $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ к оси OX и пересекает ось OY в точке B(0;b).

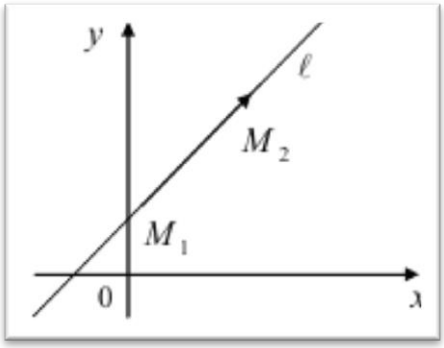


Уравнение запишется в виде $\boxed{y = kx + b}$

Частные случаи:

- ✓ Если b=0, то уравнение примет вид y=kx. Это есть уравнение прямой, проходящей через начало координат;
- ✓ Если k=0, то y=b есть уравнение прямой параллельно оси OX;
- ✓ Если k=0, b=0, то y=0 есть уравнение самой оси OX.

1.3.6. Уравнение прямой, проходящей через две точки.



Пусть на плоскости заданы две точки $M_1=(x_1, y_1)$ и $M_2=(x_2, y_2)$, тогда **уравнение прямой, проходящей через две точки имеет вид:**

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}} \quad \text{или} \quad \boxed{y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)}$$

Дробь $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ = k называется **угловым коэффициентом** прямой.

Если какой-либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель.

Пример 4. Составить уравнение прямой, проходящей через точки A=(1, 2) и B=(3, 4).

Решение. Уравнение прямой проходящей через две точки имеет вид:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

Применяя записанную выше формулу, получаем:

$$y-2=\frac{4-2}{3-1}(x-1)$$
$$y-2=x-1$$
$$x-y+1=0$$

Искомое уравнение имеет вид: x-y+1=0

1.3.7. Уравнение прямой в отрезках

Если в общем уравнении прямой Ax + By + C = 0, C ≠ 0, то, разделив уравнение на – C, получим **уравнение прямой в отрезках:**

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1}$$

где $a=-\frac{C}{A}; \quad b=-\frac{C}{B}$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент a является координатой точки пересечения прямой с осью Ox, а b – координатой точки пересечения прямой с осью Oy.

Пример 5. Задано общее уравнение прямой x – y + 1 = 0. Записать уравнение прямой в отрезках и построить.

Решение. Найти уравнение этой прямой в отрезках. C=1, C ≠ 0.

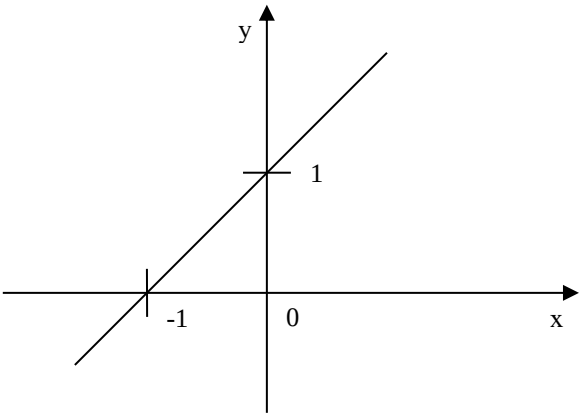
Разделим уравнение на -1, получим:

$$-\frac{x}{1}+\frac{y}{1}=1, \qquad a = -1, \quad b = 1.$$

-1 – точка пересечения прямой с осью Ox

1 – точка пересечения прямой с осью Oy

Через полученные точки проводим прямую.



Контрольные вопросы

1. Каким уравнением описывается прямая на плоскости?
2. Запишите уравнения осей координат.
3. Запишите уравнения прямых, параллельных осям координат.
4. Какой координатной оси параллельна прямая, заданная уравнением x+5=0? Начертите эту прямую.
5. Какой координатной оси параллельна прямая, заданная уравнением 2y-8=0? Начертите эту прямую.
6. Что называется вектором нормали?
7. Что называется направляющим вектором?
8. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку A=(5;-3) и имеющий направляющий вектор $\bar{a}=(-3;-2)$.
9. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку B=(-3;7) и имеющий нормальный вектор $\bar{n}=(2;-4)$.
10. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку A=(3;-8) и B=(-1;2)
11. Составьте уравнение прямой, отсекающей 5 единиц на оси Ox и 3 единицы на оси Oy.

1.4. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ПРЯМЫХ

1.4.1. Параллельность прямых

Пусть на плоскости заданы две прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ (l_1) и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ (l_2). Нормальные векторы этих прямых имеют такие координаты: $\bar{n} = (A_1; B_1)$, $\bar{n} = (A_2; B_2)$.

Если $l_1 \parallel l_2$, т.е. прямые параллельны, то их нормальные вектора коллинеарные. Это означает, что одноименные координаты векторов пропорциональны: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда коэффициенты при соответствующих координатах пропорциональны $\left(\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}\right)$, или когда угловые коэффициенты прямых равны между собой $(k_1 = k_2)$.

<u>Пример 1</u>. Установить параллельны ли прямые 5x-y+4=0 и 10x-2y+1=0.

Решение. Если прямые параллельны, то коэффициенты при соответствующих координатах пропорциональны: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$,

Проверим для нашего условия задачи: $\frac{5}{10} = \frac{-1}{-2}$, $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Прямые параллельны.

<u>Пример 2.</u> Составить уравнение прямой, проходящей через точку C=(-2;3) и параллельной прямой 3x-5y+2=0.

Решение. Так как искомая прямая параллельна данной прямой 3x-5y+2=0 то их угловые коэффициенты равны: $k_1 = k_2 = \frac{-A}{B} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$.

Запишем искомое уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y = \frac{3}{5}x + b$.

Так как искомая прямая проходит через точку C=(-2;3), то ее координаты будут удовлетворять уравнению: $3 = \frac{3}{5}(-2) + b$; $b = 3 + \frac{6}{5} = \frac{21}{5} = 4\frac{1}{5}$.

Искомое уравнение имеет вид: $y = \frac{3}{5}x + \frac{21}{5}$ или $3x - 5y + 21 = 0$

1.4.2. Перпендикулярность прямых

Пусть на плоскости заданы две прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ (l_1) и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ (l_2). Нормальные векторы этих прямых имеют такие координаты: $\bar{n} = (A_1; B_1)$, $\bar{n} = (A_2; B_2)$.

Если $l_1 \perp l_2$, т.е. прямые перпендикулярны, то скалярное произведение этих векторов должно быть равно нулю, т.е. $\overline{n_1}\overline{n_2} = 0$, откуда: $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Две прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда коэффициенты при соответствующих координатах удовлетворяют равенству $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ или когда угловые коэффициенты этих прямых обратны по величине и противоположны по знаку ($k_1k_2 = -1$).

<u>Пример 3.</u> Установить перпендикулярны ли прямые 2x-y+1=0 и x-2y+1=0

Решение. Если прямые перпендикулярны, то коэффициенты при соответствующих координатах соответствуют равенству: $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

Проверим для нашего условия задачи: $2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) \neq 0$

Прямые не перпендикулярны.

<u>Пример 4</u>. Составить уравнение прямой, проходящей через точку C=(-2;3) и перпендикулярной прямой 3x-5y+2=0.

Решение. Так как искомая прямая перпендикулярна данной прямой 3x-5y+2=0 то их угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку: $k_1k_2 = -1$; $k_2 = \frac{-1}{k_1} = \frac{-1}{3/5} = \frac{-5}{3}$.

Запишем искомое уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y = \frac{-5}{3}x + b$.

Так как искомая прямая проходит через точку C=(-2;3), то ее координаты будут удовлетворять уравнению: $3 = \frac{-5}{3}(-2) + b; \quad b = 3 - \frac{10}{3} = \frac{-1}{3}$.

Искомое уравнение имеет вид: $y = \frac{-5}{3}x - \frac{1}{3}$ или $5x + 3y + 1 = 0$

<u>Пример 5.</u> Даны вершины треугольника A=(0;1), B=(6;5), C=(12;-1). Найти уравнение высоты, проведенной из вершины C.

Находим уравнение стороны AB: $\frac{x-0}{6-0} = \frac{y-1}{5-1}; \quad \frac{x}{6} = \frac{y-1}{4}$; 4x=6y–6;

2x – 3y + 3 = 0; $y = \frac{2}{3}x + 1; \quad k_1 = \frac{2}{3}$.

Искомое уравнение высоты имеет вид: $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$CD \perp AB$, то угловые коэффициенты этих прямых обратны по величине и противоположны по знаку $k_1k_2 = -1$. $k_2 = \frac{-1}{k_1} = \frac{-1}{2/3} = \frac{-3}{2}$.

Т.к. высота проходит через точку C, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению: $y - (-1) = \frac{-3}{2}(x - 12); \quad y + 1 = \frac{-3}{2}x + 18; \quad 2y + 2 + 3x - 36 = 0; \quad 3x + 2y - 34 = 0.$

Искомое уравнение имеет вид: 3x + 2y – 34 = 0.

1.4.3. Угол между двумя прямыми

Если заданы две прямые с угловыми коэффициентами $y_1 = k_1x + b_1$, $y_2 = k_2x + b_2$, то острый угол между этими прямыми будет определяться как

$$\boxed{tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|}.$$

Угол φ между двумя прямыми, заданными общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ вычисляется по формуле

$$\boxed{\cos\ \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}}$$

Если задана точка M=(x_0, y_0), то расстояние до прямой Ax+By+C=0 определяется как

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}.$$

Координаты точки пересечения двух прямых находятся как решение системы двух уравнений.

Пример 6. Найти острый угол между прямыми 2x+y-6=0 и x-2y-4=0.

Решение. Так как прямые заданы общим уравнение, то угол вычисляется по формуле: $\cos\ \varphi = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$

$$\cos\ \varphi = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2)}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{0}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = 0$$

$$\cos\ \varphi = 0$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

Пример 7. Найти точку пересечения прямых 2x+y-6=0 и x-2y-4=0.

Решение. Решим систему двух уравнений

$$\begin{cases} 2x + y - 6 = 0 \\ x - 2y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x \\ x - 2(6 - 2x) - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x \\ x - 12 + 4x - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x \\ 5x - 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x \\ x = \dfrac{16}{5} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 6 - \dfrac{2 \cdot 16}{5} = \dfrac{-2}{5} \\ x = 3\dfrac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-2}{5} \\ x = 3\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Точка пересечения прямых имеет координату C=$\left(3\frac{1}{5};\frac{-2}{5}\right)$.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте условие параллельности прямых.
2. Сформулируйте условие перпендикулярности прямых.
3. Как найти угол между прямыми.
4. Найдите углы треугольника с вершинами A=(3;-7), B=(1;4), C=(-6;-5).

1.5. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1.5.1. Окружность и ее уравнение

Окружностью называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от одной точки, называемой центром.

Пусть центром окружности является точка O=(a;b), а расстояние до любой точки M=(x; y) окружности равно r. Тогда согласно формуле расстояния между двумя точками имеем $|OM| = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2}$. Подставив в это выражение координаты точек M и O и расстояние r, получим $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$

откуда после возведения в квадрат находим

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \qquad (1)$$

Это каноническое уравнение окружности с центром O=(a;b) и радиусом r.

<u>Пример 1</u>**.** Составить уравнение окружности с центром O=(3; -2) и радиусом r =5.

Решение. Подставив в каноническое уравнение окружности (1) a=3, b=-2 и r=5, получим: $(x-3)^2+(y+2)^2=25$.

<u>Пример 2.</u> Построить окружность $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$

Решение. Чтобы построить окружность, необходимо найти ее центр и радиус. Для этого выделим в уравнении полные квадраты, т. е. приведем уравнение к виду $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Имеем

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$$
$$(x^2 + 6x) + (y^2 - 4y) = 3$$
$$(x^2 + 2\cdot 3x + 3^2) + (y^2 - 2\cdot 2y + 2^2) = 3 + 3^2 + 4^2$$
$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 16$$

Из этого уравнения видно, что a=-3, b=2, r=4, т.е. центр окружности точка O(-3;2), а ее радиус равен r=4.

1.5.2. Эллипс и его уравнение

Эллипсом называется множество точек на плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных точек (называемых фокусами) есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

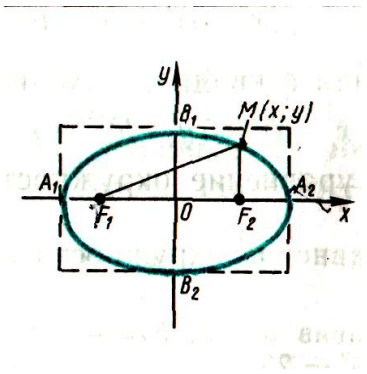
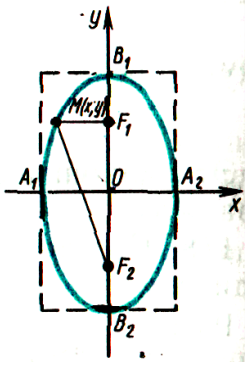
Фокусы эллипса принято обозначать буквами F_1 и F_2, расстояние между фокусами — через 2c, сумму расстояний от любой точки эллипса до фокусов — через 2a (2a > 2c).

Каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (2)$$

где a, b и c связаны между собой равенством $a^2 - b^2 = c^2$ (или $b^2 - a^2 = c^2$)

Рассмотрим два основных случая расположения эллипса относительно осей координат (рис. 1, 2). Эти случаи представлены в следующей таблице:

	 рис.1	 рис. 2
Положение фокусов	$F_1;\ F_2 \in Ox$	$F_1;\ F_2 \in Oy$
Координаты фокусов	$F_1=(-c;0),\ F_2=(c;0)$	$F_1=(0;c),\ F_2=(0;-c)$
Соотношение между a и b	a>b	b>a
Большая ось	$A_1A_2=2a$	$B_1B_2=2b$
Малая ось	$B_1B_2=2b$	$A_1A_2=2a$
Фокусное расстояние	$F_1F_2=2c$	$F_1F_2=2c$
Эксцентриситет	$\varepsilon=\frac{c}{a}$	$\varepsilon=\frac{c}{b}$
Соотношение между a, b и c	$a^2-b^2=c^2$	$b^2-a^2=c^2$
Уравнение	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами к длине большой оси.

Эксцентриситет обозначится буквой ε: $\varepsilon=\frac{c}{a}$ *или* $\varepsilon=\frac{c}{b}$

Так как по определению 2a > 2c, то эксцентриситет всегда выражается правильной дробью, т. е. $0 \le \varepsilon < 1$.

Если величина эксцентриситета приближается к единице ($\varepsilon \approx 1$), то эллипс сильно вытянут; если же величина эксцентриситета ближе к нулю ($\varepsilon \approx 0$), то эллипс имеет более округлую форму. Если эксцентриситет равен нулю, то эллипс вырождается в окружность.

Пример 3. Найти координаты фокусов, длины осей и эксцентриситет эллипса, заданного уравнением $2x^2 + y^2 = 32$.

Решение. Приведем уравнение эллипса к каноническому виду (2). Для этого разделим все его члены на 32:

$$\frac{2x^2}{32} + \frac{y^2}{32} = \frac{32}{32}: \qquad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{32} = 1$$

Мы видим, что $a^2 = 16$, $b^2 = 32$, откуда $a = 4$, $b = 4\sqrt{2}$.

Так как $b > a$, то фокусы эллипса расположены на оси ординат. Они имеют координаты $F_1(0; c)$ и $F_2(0; -c)$, где c определяется из соотношения $b^2 - a^2 = c^2$. Подставив в него значения a и b, получим

$$32 - 16 = c^2;\ c^2 = 16;\ c = 4.$$

Итак, фокусами эллипса служат точки $F_1(0; 4)$; $F_2(0; -4)$.

Далее, находим:

большую ось эллипса $2b = 8\sqrt{2}$;

малую ось $2a = 8$;

эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{8}{8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}705$

1.5.3. Гипербола и ее уравнение

Гиперболой называется множество точек плоскости, разность расстояний от каждой из которых до двух заданных точек (называются фокусами) есть величина постоянная. Эта постоянная величина положительна и меньше расстояния между фокусами.

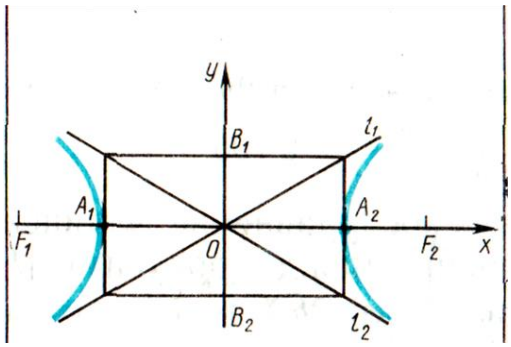
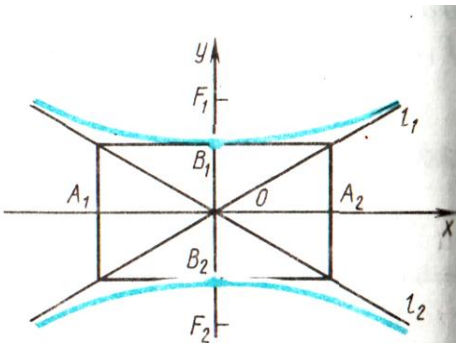
Фокусы гиперболы принято обозначать буквами F_1 и F_2, расстояние между фокусами — через 2c, постоянную разность между расстояниями от любой точки гиперболы до ее фокусов — через 2a (2a<2c).

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ или } \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \qquad (3)$$

где a, b, c связаны между собой равенством $a^2 + b^2 = c^2$.

Рассмотрим два основных случая расположения гиперболы относительно осей координат (рис. 3, 4). Эти случаи иллюстрирует следующая таблица.

	 рис.3	 рис. 4
Положение фокусов	$F_1;\ F_2 \in Ox$	$F_1;\ F_2 \in Oy$
Координаты фокусов	$F_1 = (-c;0),\ F_2 = (c;0)$	$F_1 = (0;c),\ F_2 = (0;-c)$
Действительная ось	$A_1A_2 = 2a$	$B_1B_2 = 2b$
Мнимая ось	$B_1B_2 = 2b$	$A_1A_2 = 2a$
Фокусное расстояние	$F_1F_2 = 2c$	$F_1F_2 = 2c$
Эксцентриситет	$\varepsilon = \frac{c}{a}$	$\varepsilon = \frac{c}{b}$
Соотношение между a, b и c	$c^2 - a^2 = b^2$	$c^2 - b^2 = a^2$
Уравнение	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами к длине действительной оси: $\varepsilon = \frac{c}{a}$ *или* $\varepsilon = \frac{c}{b}$

Так как по определению 2a < 2c, то эксцентриситет гиперболы всегда выражается неправильной дробью, т. е. $\varepsilon > 1$.

Прямые l_1 и l_2 (рис. 3,4) называются асимптотами; их уравнения имеют вид

$$y = \pm\frac{b}{a}x \qquad (4)$$

<u>Пример 4.</u> Найти координаты фокусов, длины осей, эксцентриситет и уравнения асимптот гиперболы, заданной уравнением $16x^2 - 25y^2 = 400$.

Решение. Приведем уравнение к каноническому виду (3). Для этого разделим все его члены на 400:

$$\frac{16x^2}{400} - \frac{25y^2}{400} = \frac{400}{400}: \quad \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$$

из этого уравнения видно, что фокусы гиперболы расположены на оси абсцисс и мы можем записать

$a = 25$, $b^2 = 16$, т. е. $a = 5$, $b = 4$.

Зная a и b, найдем c: $a^2 + b^2 = c^2$; $c^2 = 25 + 16 = 41$; $c = \sqrt{41}$.

Итак, фокусами гиперболы являются точки $F_1(-\sqrt{41};0)$; $F_2(\sqrt{41};0)$; действительная ось гиперболы $2a = 10$; мнимая ось $2b = 8$; эксцентриситет $\varepsilon = 2\sqrt{41}/10 = \sqrt{41}/5$; уравнения асимптот $y = \pm(4/5)x$.

1.5.4. Парабола и ее уравнение

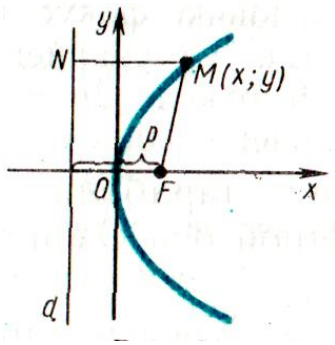
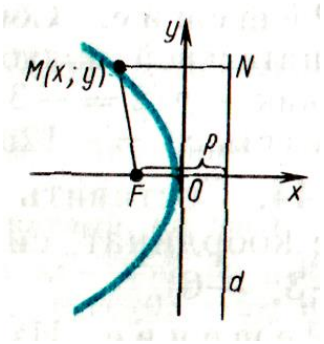
Параболой называется множество точек на плоскости, равноудаленных от заданной точки (называемой фокусом) и данной прямой (называемой директрисой.

Фокус параболы принято обозначать буквой F, директрису буквой d, расстояние от фокуса до директрисы — буквой p (p>0). Рассмотрим основные случаи расположения парабол относительно осей координат.

Каноническое уравнение параболы, фокус которой расположен на оси абсцисс, (рис. 5, 6), имеет вид

$$y^2 = 2px \text{ или } y^2 = -2px. \qquad (5)$$

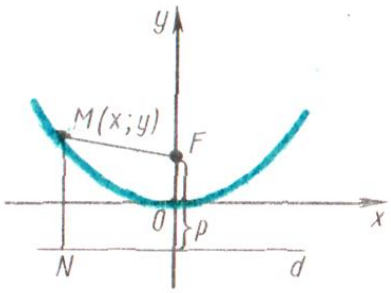
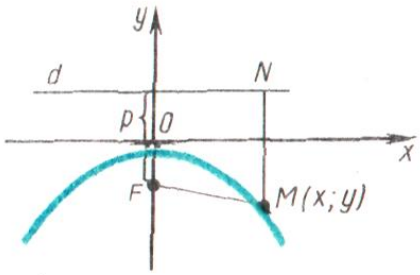
Эти два случая представлены в следующей таблице:

	 рис.5	 рис. 6
Положение фокуса	на положительной полуоси Ox	на отрицательной полуоси Ox
Координаты фокуса	$F = \left(\frac{p}{2};0\right)$	$F = \left(-\frac{p}{2};0\right)$,
Уравнение директрисы	$y = -\frac{p}{2}$	$y = \frac{p}{2}$
Уравнение параболы	$y^2 = 2px$	$y^2 = -2px$

Каноническое уравнение параболы, фокус которой расположен на оси ординат (рис. 7, 8), имеет вид

$$x^2 = 2py \text{ или } x^2 = -2py. \qquad (6)$$

Эти два случая представлены в таблице:

	 рис.7	 рис. 8
Положение фокуса	на положительной полуоси Оу	на отрицательной полуоси Оу
Координаты фокуса	$F=\left(0;\frac{p}{2}\right)$	$F=\left(0;-\frac{p}{2}\right)$,
Уравнение директрисы	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$
Уравнение параболы	$x^2=2py$	$x^2=-2py$

<u>Пример 5.</u> Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы, заданной уравнением $y^2 = 8x$.

Решение. Из данного канонического уравнения параболы следует, что 2p = 8, т. е. p = 4, откуда p/2 = 2.

Значит, точка F(2; 0) – фокус параболы, а x=2 — уравнение ее директрисы.

Контрольные вопросы

1. Запишите каноническое уравнение окружности.
2. Запишите каноническое уравнение эллипса.
3. Найдите координаты фокусов, длины осей, фокусное расстояние и эксцентриситет эллипса, заданного уравнением $\frac{x^2}{196}+\frac{y^2}{144}=1$.
4. Что называется эксцентриситетом эллипса? Какова его величина?
5. Запишите каноническое уравнение гиперболы.
6. Найдите координаты фокусов, длины осей и эксцентриситет гиперболы $144x^2-25y^2=3600$.
7. Запишите каноническое уравнение параболы, директрисы параболы.
8. Составьте уравнение параболы, фокус которой имеет координаты (0;-2).
9. Составьте уравнение параболы, директриса которой задана уравнением 4x+6=0.

2. ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

2.1. Вектора. Скалярное произведение векторов

Задание 1. Вычислить площадь треугольника ABC: в № 1-16, если известны координаты его вершин; в № 17-30 построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

№	A	B	C	№	A	B	C
1	$(1,1,-1)$	$(3,5,-2)$	$(2,1,0)$	9	$(3,-2,0)$	$(5,-1,-1)$	$(2,0,1)$
2	$(3,5,4)$	$(4,4,1)$	$(3,1,2)$	10	$(2,-3,2)$	$(3,-2,3)$	$(2,1,0)$
3	$(0,3,2)$	$(3,2,4)$	$(1,3,4)$	11	$(3,4,2)$	$(4,6,3)$	$(4,3,2)$
4	$(-1,2,-1)$	$(1,4,0)$	$(0,3,1)$	12	$(-1,2,3)$	$(0,2,4)$	$(1,-2,3)$
5	$(4,1,-3)$	$(5,3,-3)$	$(3,2,0)$	13	$(2,4,-3)$	$(3,5,-4)$	$(3,4,0)$
6	$(1,-1,-2)$	$(3,2,0)$	$(3,0,3)$	14	$(1,2,3)$	$(4,4,2)$	$(2,0,3)$
7	$(2,2,1)$	$(3,5,0)$	$(3,2,2)$	15	$(1,3,2)$	$(2,4,0)$	$(2,3,0)$
8	$(1,3,0)$	$(4,4,-1)$	$(2,4,1)$	16	$(1,-2,3)$	$(4,0,2)$	$(3,0,3)$

№	$\bar{a}$	$\bar{b}$	№	$\bar{a}$	$\bar{b}$
17	$\{3,0,0\}$	$\{4,-2,7\}$	24	$\{1,-8,4\}$	$\{2,3,0\}$
18	$\{-6,2,1\}$	$\{4,3,2\}$	25	$\{2,6,5\}$	$\{1,2,3\}$
19	$\{5,-5,5\}$	$\{2,3,4\}$	26	$\{1,7,-1\}$	$\{2,0,-1\}$
20	$\{4,-6,5\}$	$\{2,1,-1\}$	27	$\{4,6,1\}$	$\{3,-1,0\}$
21	$\{-8,2,0\}$	$\{1,-1,1\}$	28	$\{4,5,-2\}$	$\{1,0,-1\}$
22	$\{7,2,-4\}$	$\{2,3,1\}$	29	$\{-3,7,0\}$	$\{1,1,1\}$
23	$\{5,3,-2\}$	$\{0,1,1\}$	30	$\{2,6,-1\}$	$\{-1,2,1\}$

Задание 2. По координатам вершин пирамиды A1 A2 A3 A4 найти:

а) длины ребер A1 A2 и A1 A3 ;

б) угол между ребрами A1 A2 и A1 A3 ;

в) площадь грани A1 A2 A3 ;

г) объем пирамиды;

1. $A_1(-1;2;1), A_2(-2;2;5), A_3(-3;3;1), A_4(-1;4;3)$
2. $A_1(-2;1;-1), A_2(-3;1;3), A_3(-4;2;-1), A_4(-2;3;1)$
3. $A_1(1;1;2), A_2(0;1;6), A_3(-1;2;2), A_4(1;3;4)$
4. $A_1(-1;-2;1), A_2(-2;-2;5), A_3(-3;-1;1), A_4(-1;0;3)$
5. $A_1(2;-1;1), A_2(1;-1;5), A_3(0;0;1), A_4(2;1;3)$
6. $A_1(-1;1;-2), A_2(-2;1;2), A_3(-3;2;-2), A_4(-1;3;0)$
7. $A_1(1;2;1), A_2(0;2;5), A_3(-1;3;1), A_4(1;4;3)$
8. $A_1(-2;-1;1), A_2(-3;-1;5), A_3(-4;0;1), A_4(-2;1;3)$
9. $A_1(1;-1;2), A_2(0;-1;6), A_3(-1;0;2), A_4(1;1;4)$
10. $A_1(0;3;2), A_2(-1;3;6), A_3(-2;4;2), A_4(0;5;4)$
11. $A_1(-1;2;0), A_2(-2;2;4), A_3(-3;3;0), A_4(-1;4;2)$
12. $A_1(2;2;3), A_2(1;2;7), A_3(0;3;3), A_4(2;4;5)$
13. $A_1(1;-2;1), A_2(0;-2;5), A_3(-1;-1;1), A_4(1;0;3)$
14. $A_1(0;-1;2), A_2(-1;-1;6), A_3(-2;0;2), A_4(0;1;4)$
15. $A_1(0;2;-1), A_2(-1;2;3), A_3(-2;3;7), A_4(0;4;1)$
16. $A_1(2;3;2), A_2(1;3;6), A_3(0;4;2), A_4(2;5;4)$

17. $A_1(-1;0;2), A_2(-2;0;6), A_3(-3;1;2), A_4(-1;2;4)$
18. $A_1(2;0;3), A_2(1;0;7), A_3(0;1;3), A_4(2;2;5)$
19. $A_1(2;-1;2), A_2(1;-1;6), A_3(0;0;2), A_4(2;1;4)$
20. $A_1(3;0;2), A_2(2;0;6), A_3(1;1;2), A_4(3;2;4)$

2.2. Уравнение прямой на плоскости

Задание 1. В треугольнике ABC составьте уравнения:

1. Стороны BC;
2. Высоты, опущенной из вершины A на сторону BC;
3. Медианы, проведенной из вершины C.

1. $A(-3;3),\ B(5;1), C(6;-2)$
2. $A(2;0),\ B(5;3), C(3;7)$
3. $A(2;1),\ B(-1;-1), C(3;-2)$
4. $A(-2;-1),\ B(1;1), C(4;0)$
5. $A(4;-2),\ B(1;6), C(-3;1)$
6. $A(0;4),\ B(-3;-2), C(0;1)$
7. $A(-1;1),\ B(1;-2), C(3;1)$
8. $A(2;4),\ B(1;1), C(4;2)$
9. $A(3;4),\ B(2;1), C(5;2)$
10. $A(2;2),\ B(1;-1), C(4;0)$
11. $A(2;7),\ B(1;4), C(4;5)$
12. $A(2;6),\ B(1;3), C(4;4)$
13. $A(2;5),\ B(1;2), C(4;3)$
14. $A(-2;2),\ B(1;-1), C(4;1)$
15. $A(1;-4),\ B(3;2), C(-3;1)$
16. $A(2;-1),\ B(4;5), C(-3;2)$
17. $A(-3;4),\ B(5;1), C(6;-2)$
18. $A(0;1),\ B(-2;2), C(3;-2)$
19. $A(3;-1),\ B(-3;1), C(1;4)$
20. $A(4;2),\ B(-1;3), C(1;-2)$
21. $A(2;0),\ B(-2;1), C(1;-1)$
22. $A(1;1),\ B(-2;-3), C(2;0)$
23. $A(3;2),\ B(-1;3), C(1;-2)$
24. $A(5;4),\ B(4;1), C(7;2)$
25. $A(2;1),\ B(1;-2), C(4;-1)$
26. $A(2;0),\ B(1;-3), C(4;-2)$
27. $A(-1;0),\ B(1;5), C(4;-3)$
28. $A(-3;-2),\ B(2;2), C(4;-1)$
29. $A(2;7),\ B(-3;-3), C(3;-1)$
30. $A(2;5),\ B(1;2), C(4;3)$

Задание 2. Напишите уравнения прямых, проходящих через точку M, одна из которых параллельная, а другая – перпендикулярна заданной прямой k.

1. $M(-2;1),\ k: 3x-2y+12=0$
2. $M(3;-3),\ k: x+2y-4=0$
3. $M(-5;0),\ k: -x+2y+9=0$
4. $M(1;-1),\ k: 2x+2y+1=0$
5. $M(6;-1),\ k: 2x-3y+4=0$
6. $M(1;1),\ k: x-y+10=0$
7. $M(-1;1),\ k: x+y+2=0$
8. $M(2;1),\ k: x+4y+1=0$
9. $M(3;-1),\ k: 3x-y+2=0$
10. $M(1;-5),\ k: 3x+3y+2=0$
11. $M(-3;-4),\ k: x-3y-5=0$
12. $M(-2;4),\ k: 4x+2y-7=0$
13. $M(0;-3),\ k: 2x-5y+21=0$
14. $M(-4;4),\ k: x+5y+13=0$
15. $M(3;3),\ k: -4x+y-2=0$
16. $M(2;-1),\ k: x-y+1=0$
17. $M(-1;4),\ k: 2x-5y+2=0$
18. $M(4;-1),\ k: x+4y-3=0$
19. $M(2;0),\ k: -4x+y+2=0$
20. $M(1;-3),\ k: -3x-y+2=0$
21. $M(3;-2),\ k: 2x-3y-2=0$
22. $M(2;2),\ k: 3x+y+4=0$
23. $M(-2;2),\ k: 4x+y-3=0$
24. $M(-2;-2),\ k: 2x+5y-2=0$
25. $M(2;-3),\ k: -2x+5y-4=0$
26. $M(5;1),\ k: -2x+5y-2=0$
27. $M(1;6),\ k: -2x+y=0$
28. $M(2;4),\ k: -x-5y-2=0$
29. $M(-3;0),\ k: 4x-y+13=0$
30. $M(1;4),\ k: -2x+5y-2=0$

Задание 3. Напишите уравнения прямой, проходящих через точку M, и через точку пересечения прямых k_1 и k_2.

1. $M(1;-2),\ k_1: 2x-y-1=0;\ \ k_2: x+3y-4=0$
2. $M(-4;0),\ k_1: x+y-2=0;\ \ k_2: x-3y+2=0$

3. $M(1;-1)$, $k_1: 7x-2y-5=0$; $k_2: x-5y+4=0$
4. $M(4;3)$, $k_1: 5x-2y-1=0$; $k_2: 2x-3y+4=0$
5. $M(3;3)$, $k_1: x-2y-1=0$; $k_2: x-7y+4=0$
6. $M(4;4)$, $k_1: 2x+2y-2=0$; $k_2: x-3y+5=0$
7. $M(0;-3)$, $k_1: x+4y-3=0$; $k_2: x+5y+4=0$
8. $M(2;-2)$, $k_1: 3x+2y-1=0$; $k_2: x-3y-4=0$
9. $M(-2;0)$, $k_1: 2x+3y+5=0$; $k_2: -x+4y+3=0$
10. $M(1;-2)$, $k_1: 2x+y+6=0$; $k_2: 3x+5y-15=0$
11. $M(2;1)$, $k_1: 2x-y+3=0$; $k_2: 3x+5y+11=0$
12. $M(-1;-3)$, $k_1: 3x+2y-5=0$; $k_2: x-2y+1=0$
13. $M(-1;1)$, $k_1: 3x+2y-5=0$; $k_2: x-2y+1=0$
14. $M(2;-3)$, $k_1: x+y-2=0$; $k_2: x-2y-1=0$
15. $M(4;0)$, $k_1: x+2y-5=0$; $k_2: x-2y+2=0$
16. $M(3;-2)$, $k_1: x-2y+3=0$; $k_2: 3x-y-1=0$
17. $M(0;1)$, $k_1: x+3y-7=0$; $k_2: -x+y-1=0$
18. $M(1;0)$, $k_1: 4x-y-5=0$; $k_2: x+2y-8=0$
19. $M(-1;-4)$, $k_1: 2x-y-5=0$; $k_2: x+y-7=0$
20. $M(2;-4)$, $k_1: 3x-y+10=0$; $k_2: -x-y-2=0$
21. $M(2;-5)$, $k_1: 3x-4y-5=0$; $k_2: 4x+3y-15=0$
22. $M(2;1)$, $k_1: -2x+y-1=0$; $k_2: 2y+1=0$
23. $M(1;-4)$, $k_1: -2x+2y-11=0$; $k_2: 2x+3=0$
24. $M(-2;4)$, $k_1: -x+2y-1=0$; $k_2: -7x-4y+11=0$
25. $M(2;3)$, $k_1: -x+y-4=0$; $k_2: -7x-4y-6=0$
26. $M(1;-4)$, $k_1: 3x-2y-8=0$; $k_2: -3x+4y+4=0$
27. $M(3;2)$, $k_1: -3x+4y+1=0$; $k_2: 7x-9y-3=0$
28. $M(-3;3)$, $k_1: -3x+4y+14=0$; $k_2: 7x-4y-6=0$
29. $M(1;7)$, $k_1: -2x+5y+9=0$; $k_2: 3x-4y-3=0$
30. $M(-1;5)$, $k_1: 5x+3y-1=0$; $k_2: 4x+5y+7=0$

2.3. Кривые второго порядка

Задание №1. Составить уравнения окружностей:

а) с центром (-2;-5) и радиусом r = $\sqrt{3}$;

б) с центром (-5; 0) и радиусом r = 3;

в) с центром (0; -7) и радиусом r = 2.

Задание №2. Постройте окружности:

а) $x^2 + y^2 - 10x - 6y - 2 = 0$,

б) $x^2 + y^2 - 10x + 9 = 0$;

в) $x^2 + y^2 + 8x + 7 = 0$.

Задание №3. Составить каноническое уравнение эллипса, у которого малая ось 2b = 6, а расстояние между фокусами $|F_1F_2| = 8$

Задание №4. Найти координаты фокусов, длины осей и эксцентриситет эллипса, заданного уравнением $16x^2 + 25y^2 = 400$.

Задание №5. Составить уравнение эллипса, координаты фокусов которого (-7; 0) и (7; 0),

а эксцентриситет ε = 0,28.

Задание №6. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат, ε = 0,6 и 2b = 10.

Задание №7. Эллипс задан уравнением $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$. Найти координаты фокусов эллипса, фокусное расстояние и эксцентриситет.

Задание №8. Составить уравнение эллипса, фокусы которого имеют координаты ($\sqrt{3}$; 0) и (-$\sqrt{3}$; 0), а большая ось равна $4\sqrt{7}$.

Задание №9. Составить каноническое уравнение гиперболы с фокусами на оси абсцисс, если известно, что эксцентриситет ε = 1,5, а фокусное расстояние равно 6.

Задание №10. Найти длины осей, координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения асимптот гиперболы, заданной уравнением $7x^2 - 9y^2 = 63$.

Задание №11. Составить каноническое уравнение гиперболы с фокусами на оси Оу, если действительная ось равна $4\sqrt{5}$, а эксцентриситет $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Задание №12. Составить каноническое уравнение гиперболы, действительная ось которой 2b = 10, а уравнения асимптот имеют вид $y=\pm\frac{5}{3}x$.

Задание №13. Эксцентриситет гиперболы с фокусами на оси Оу равен 1,4. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известно, что 2b = 10.

Задание №31 . Составить каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси Ох, расстояние между ними равно $10\sqrt{2}$, а уравнения асимптот имеют вид $y=\pm\frac{3}{4}x$.

Задание №14. Найти каноническое уравнение параболы и уравнение ее директрисы, если известно, что вершина параболы лежит в начале координат, а фокус имеет координаты (0; -3).

Задание №15. Найти каноническое уравнение параболы и уравнение директрисы, если фокус параболы — точка F(-2; 0).

Задание №16. Парабола задана уравнением $x^2 = -32y$. Найти координаты ее фокуса и уравнение директрисы.

Задание №17. Парабола с вершиной в начале координат симметрична оси Оу и проходит через точку А (-5; 2). Составить каноническое уравнение параболы.

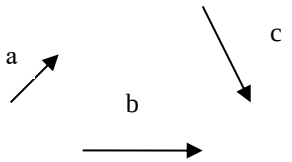
Задание №18. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы, заданной уравнением $y^2 = 24x$.

Задание №19. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы, заданной уравнением $x^2 — 4y = 0$.

Задание №20. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если уравнение ее директрисы $x + 3 = 0$.

Задание №21. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если уравнение ее директрисы $2y+7 = 0$.

2.4. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант №1	Вариант №2
1. По данным векторам $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ постройте вектор $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$ 	1. Постройте вектор $\overline{AB}$, если A(-1;-2), B(4;3)
2. Проверьте, перпендикулярны ли векторы $\bar{a}=(3/4;-1/5)$, $\bar{b}=(4/3;5)$	2. Проверьте, перпендикулярны ли векторы $\bar{a}=(-2;5)$, $\bar{b}=(3;1)$
3. Проверьте, принадлежат ли точки A(3;14), B(4;13), C(-3;0), D(0;7) прямой 7x-3y+21=0	3. Определить лежит ли точка B(2;0) на линии, заданной уравнением $4x^2-3y^2+6xy-2x+1=0$
4. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку A(-1;5) параллельно вектору $\bar{n}=(-2;3)$	4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M(-5;1) и перпендикулярной данному вектору $\vec{n}(3;-4)$
5. Составьте уравнение окружности с центром в точке (6;-7) и радиусом равным 6.	5. Составьте уравнение эллипса, если две его вершины находятся в точках $A_1(-6;0)$ и $A_2(6;0)$, а фокусы – в точках $F_1(-4;0)$ и $F_2(4;0)$
Вариант №3	**Вариант №4**
1. Найти координаты вектора $\overline{AB}$, если A(1;-3),B(4;5)	1. Даны векторы $\bar{a}(-2;-3)$, $\bar{b}(5;0)$. Найти координаты вектора $\bar{a}+\bar{b}$,
2. Вычислить угол между векторами $\bar{a}=(-4;3)$ и $\bar{b}=(3;-4)$	2. Вычислить угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, если A(3;1), B(7;4), C(3;2), D(6;5).
3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M(-2;1) и перпендикулярной данному вектору $\vec{n}(1;2)$	3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(-2;1) и параллельная данному вектору $\vec{n}(1;2)$
4. Найти угол между векторами $\bar{p}$ и $\bar{q}$, если: $\bar{a}=(-1;2)$, $\bar{b}=(3;7)$,	4. Найти острый угол между двумя прямыми, если первая из них проходит через точки A(4;2) и B(1;-7), а вторая – через точки C(-1;3) и B(8;6)

$\overline{p} = 4\overline{a} - 3\overline{b},\ \overline{q} = 9\overline{b} - 12\overline{a}$ 5. Составьте уравнение эллипса, если расстояние между фокусами равно 10 (фокусы лежат на оси Ох) и большая ось равна 12	5. Составьте уравнение эллипса, если фокусами служат точки (-2;0) и (2;0), а малая ось равна 8
Вариант №5 1. Даны векторы $\overline{a}(-2;-3)$, $\overline{c}(3;-5)$. Найти координаты вектора $\overline{a} - \overline{c}$, 2. Даны точки А(-2;4), В(3;-6), С(4;-2), D(1;5). Вычислите скалярное произведение $\overline{AB} \cdot \overline{CD}$ 3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку М(3;-5) и параллельной вектору $\overline{n} = (4;2)$ 4. Найти острый угол между двумя прямыми, если первая из них проходит через точки А(-6;7) и В(2;-5), а вторая – через точки С(-5;2) и В(1;1) 5. Составьте уравнение эллипса, если две его вершины находятся в точках (-5;0) и (5;0), а фокусы – в точках (-3;0) и (3;0)	Вариант №6 1. Даны векторы $\overline{a}(-2;-3)$, $\overline{b}(5;0)$, $\overline{c}(3;-5)$. Найти координаты вектора $\overline{a} + \overline{b} - \overline{c}$, 2. Проверьте, перпендикулярны ли векторы $\overline{a} = (-3;5)$, $\overline{b} = (5;3)$ 3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку М(-2;-3) и параллельной вектору $\overline{n} = (4;-5)$ 4. Найти острый угол между двумя прямыми, имеющими общую точку М(-2;-1), если первая из них проходит через точку (3;3), а вторая – через точку С(3;-2) 5. Составьте уравнение эллипса, если две его вершины находятся в точках (0;-8) и (0;8), а фокусы – в точках (-5;0) и (5;0)
Вариант №7 1. Даны векторы $\overline{a}(-2;-3)$. Найти координаты вектора $2\overline{a}$, 2. Найдите косинус угла между векторами $\overline{a} + \overline{b}$ и $\overline{a} - \overline{b}$, если $\overline{a} = (2;3)$ и $\overline{b} = (1;1)$ 3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку А(1;-1) и $B(-3;4)$ 4. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку А(-3;2) параллельно прямой 5x-3y+21=0	Вариант №8 1. Даны векторы $\overline{a}(-2;-3)$, $\overline{c}(3;-5)$. Найти координаты вектора $3\overline{a} - \overline{c}$, 2. Проверьте, перпендикулярны ли векторы $\overline{a} = (-3;2)$, $\overline{b} = (4;6)$ 3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку М(-2;-3) и перпендикулярной вектору $\overline{AB}$, если А(-5;2), В(-1;4) 4. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку А(-1;-4) параллельно прямой $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$

5. Составьте уравнение гиперболы с фокусами на оси Ох, если длина ее действительной оси равна 6, а эксцентриситет равен $\frac{5}{3}$	5. Составьте уравнение гиперболы с фокусами на оси Ох, если длина ее мнимой оси равна 8, а эксцентриситет равен $\frac{3\sqrt{5}}{5}$
Вариант №9	Вариант №10
1. Даны векторы $\bar{a}(-2;-3)$, $\bar{b}(5;0)$, $\bar{c}(3;-5)$. Найти координаты вектора $\bar{a}-2\bar{b}+2\bar{c}$,	1. Найти длину вектора $\overline{AB}$, если A(1;1) и B(4;-3)
2. Проверьте, перпендикулярны ли векторы $\bar{a}=(-2;2)$, $\bar{b}=(3;-1)$	2. Даны точки A(-1;4), B(2;-3), C(1;-2), D(1;5). Вычислите скалярное произведение $\overline{AB}\cdot\overline{CD}$
3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку M(2;2) и перпендикулярной вектору $\overline{AB}$, если A(1;-3), B(6;-5)	3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку M(-2;-3) и перпендикулярной вектору $\overline{AB}$, если A(2;1), B(1;5)
4. Найдите острый угол между прямой 3x+2y+4=0 и прямой, проходящей через точки A(4;-3) и B(2;-2)	4. Найдите острый угол между прямой x+2y-4=0 и прямой, проходящей через точки A(1;5) и B(-4;3)
5. Составьте уравнение гиперболы с фокусами на оси Ох, если ее действительная ось равна 24, а мнимая ось равна 40	5. Составьте уравнение гиперболы с фокусами на оси Ох, если ее действительная ось равна 12, а мнимая ось равна 20
Вариант №11	Вариант №12
1. Даны точки A(-4;0), B(7;4). Найти длину вектора $\overline{AB}$.	1. Даны точки C(-4;6), B(7;4). Найти длину вектора $\overline{BC}$.
2. Вычислить угол между векторами $\bar{a}=(-5;3)$ и $\bar{b}=(3;-5)$	2. Вычислить угол между векторами $\bar{a}=(-2;1)$ и $\bar{b}=(1;-2)$
3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки A(2;-3) и B(-1;4)	3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки A(1;-1) и B(-2;2)
4. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку M(-3;-1) параллельно прямой (AB), где A(-2;6) и B(3;-1)	4. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку M(1;-4) параллельно прямой (AB), где A(-3;1) и B(3;2)
5. Составьте уравнение эллипса, если расстояние между фокусами равно 6	5. Составьте уравнение эллипса, фокусы которого находятся в точках $F_1(-4;0)$ и

(фокусы лежат на оси OX) и большая ось равна 10.	$F_2(4;0)$, а эксцентриситет e=0,8.
Вариант №13 1. Вычислите периметр треугольника, вершинами которого служат точки: A(-4;0), B(7;4), C(-4;6). 2. Вычислить угол между векторами $\bar{a}=(-4;3)$ и $\bar{b}=(3;-4)$ 3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки A(3;0) и B(0;4) 4. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых x+y-4=0 и x-y=0 параллельно прямой x-4y+4=0 5. Составьте уравнение эллипса, с фокусами на оси OX, если 2a=8 и 2b=6	Вариант №14 1. Вычислите периметр треугольника, вершинами которого служат точки: A(6;7), B(3;3), C(1;-5). 2. Вычислить угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, если A(3;1), B(7;4), C(3;2), D(6;5). 3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки A(3;-3) и B(-5;4) 4. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1$ и $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}=1$ параллельно прямой x-2y-6=0 5. Составьте уравнение эллипса, с фокусами на оси OY, если 2a=10 и 2b=4
Вариант №15 1. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}=(-3;2)$ и $\bar{b}=(4;3)$ 2. Даны точки A(-2;4), B(3;-6), C(4;-2), D(1;5). Вычислите скалярное произведение $\overline{AB}\cdot\overline{CD}$ 3. Составьте уравнение сторон треугольника, вершинами которого служат точки A(-3;-2), B(1;5), C(8;-4) 4. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку M(4;3) перпендикулярно прямой 5x-2y+10=0 5. Составьте уравнение эллипса, с фокусами на оси OX, если расстояние между фокусами равно 12, а эксцентриситет e=0,6	Вариант №16 1. Общее уравнение прямой 3x-4y+2=0 преобразовать к уравнению в отрезках на осях. 2. Даны точки A(-1;3), B(0;4), C(3;-2), D(1;-1). Вычислите скалярное произведение $\overline{AB}\cdot\overline{CD}$ 3. Составьте уравнение сторон треугольника, вершинами которого служат точки A(1;-2), B(1;-1), C(3;2) 4. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку M(-4;1) перпендикулярно прямой $\frac{x}{5}-\frac{y}{6}=1$ 5. Составьте уравнение эллипса, с фокусами на оси OX, если расстояние между фокусами равно 16, а эксцентриситет e=0,8

Вариант №17 1. Общее уравнение прямой 2x-4y+2=0 преобразовать к уравнению в отрезках на осях. 2. Даны точки A(2;3), B(-1;4), C(3;3), D(1;0). Вычислите скалярное произведение $\overline{AB}\cdot\overline{CD}$ 3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку A(-1;-1) и имеющий угловой коэффициент k=1 4. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку (2;4) перпендикулярно прямой AB, где A(-2;6) и B(3;-3) 5. Составьте уравнение эллипса, с фокусами на оси OX, если 2a=10 и 2b=8	Вариант №18 1. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}=(-4;1)$ и $\bar{b}=(3;5)$ 2. Даны точки A(1;3), B(-1;0), C(2;1), D(-1;-2). Вычислите скалярное произведение $\overline{AB}\cdot\overline{CD}$ 3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку A(2;-4) и имеющий угловой коэффициент k=5. 4. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых x+2y+4=0 и 3x-y-9=0 перпендикулярно прямой x+y-7=0 5. Составьте уравнение окружности с центром в точке (2;-3) и радиусом равным 4.
Вариант №19 1. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}=(-9;1)$ и $\bar{b}=(8;5)$ 2. Даны точки A(1;5), B(-1;0), C(4;1), D(-1;-4). Вычислите скалярное произведение $\overline{AB}\cdot\overline{CD}$ 3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку A(2;-4) и B(5;6). 4. Прямая проходит через середину отрезка AB и перпендикулярно ему. Составьте уравнение этой прямой, если A(-2;-1) и B(4;4) 5. Составьте уравнение окружности с центром в точке (-1;6) и радиусом равным 4.	Вариант №20 1. Найти периметр треугольника с вершинами $A=(-9;1)$, $B=(8;5)$, C=(-2;2) 2. Даны точки A(1;-2), B(-1;1), C(4;2), D(-3;-4). Вычислите скалярное произведение $\overline{AB}\cdot\overline{CD}$ 3. Найти угол между векторами $\bar{a}$(2;-4) и $\bar{b}$(5;6). 4. Прямая проходит через середину отрезка AB и перпендикулярно ему. Составьте уравнение этой прямой, если A(-1;4) и B(3;-2) 5. Составьте уравнение эллипса, фокусы которого находятся в точках $F_1(-2;0)$ и $F_2(2;0)$, а эксцентриситет e=0,5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алгебра и начала анализа. Математика для техникумов. / Под ред. Г.Н.Яковлева. – М.: Наука, ч.1 1987, ч.2 1988.

2. Афанасьева О.Н., Бродский Я.С. и др. Сборник задач по математике для техникумов. Учебн. Пособие. – М.: Наука, 1987.

3. Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов на базе средней школы. Учебн. Пособие. – М.: Наука, 1990.

4.Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2–х ч.: Учеб.пособие для втузов. – 5–е изд., испр. – М.: Высш.шк., 1999. – 304 с.: ил.

5.Шипачев В.С. Высшая математика. Учеб.для вузов.-М.: Высш.школа. 1998.- 497с.: ил.

6. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике. Учеб.пособие для вузов.-М.: Высш.школа. 1998.- 304с.: ил.

7. В. Т. Лисичкин, И. Л. Соловейчик. Математика. Учеб.пособие для техникумов.-М.: Высш.школа. 1991. – 480 с.: ил

8. Дмитрий Письменный Конспект лекций по высшей математике Учеб.пособие для втузов. – 3-е изд.. – М.: Айрис – пресс; 2005. – 608 с.: ил.

9. Н. В. Богомолов Практические занятия по математике: Учеб.пособие для втузов. – 4–е изд., стер. – М.: Высш.шк.,1997. – 495с.